Estimación por intervalo

Jaime Vázquez • Lizbeth Naranjo • Ruth Fuentes • Margarita Chávez

Proyecto PAPIME UNAM PE107117
"Estadística para estudiantes de ciencias"

Índice general

Introducción

La estadística inferencial es una disciplina que se basa en gran medida en la probabilidad y que ayuda a resolver problemas mediante inferencias de alguna característica de la población usando datos muestrales de la misma.

La estadística involucra conceptos y resultados que pueden resumirse en grandes temas: análisis exploratorio de datos, distribuciones muestrales, estimación puntual, estimación por intervalo y pruebas de hipótesis, los cuales son fundamentales en el estudio y la aplicación de esta disciplina. En esta parte se abordarán los tópicos relacionados con la estimación por intervalo.

Se inicia con la exposición del concepto de intervalo de confianza y el método pivotal, para continuar con la deducción de los intervalos correspondientes a los parámetros de poblaciones normales. Se concluye con la teoría para hallar intervalos en el caso de muestras grandes y con una introducción al enfoque Bayesiano.

Para la lectura de este documento es importante contar con conocimientos de teoría de la probabilidad, así como de cálculo diferencial e integral en una y varias variables. Se recomienda la lectura previa de las notas *introducción a la estadística* y *estimación puntual* de los mismos autores.

CAPÍTULO 1

Estimación por intervalo

Es usual iniciar el estudio de la inferencia estadística con el planteamiento de estimación puntual para el parámetro (o los parámetros) de una distribución. En esta parte, se abordará otro enfoque: el tema relacionado con la búsqueda de un margen de variación para el valor que el parámetro puede tomar, es decir, el planteamiento de estimación por intervalo.

Desde esta perspectiva, para inferir respecto a una característica de la población, se procede a su estimación a partir de los datos encontrados en la muestra y se prefiere ahora proponer un rango de valores que tenga la posibilidad de contener al parámetro. Esto se logra generalmente mediante un intervalo que es entendido como un conjunto de valores (calculado a partir de los datos de una muestra) en el cual puede encontrarse el verdadero valor del parámetro con un determinado nivel de certeza o confianza. Se comenzará introduciendo el concepto de intervalo de confianza.

1.1. Intervalos de confianza

Es común que en los medios de comunicación como radio, televisión, revistas o periódicos, así como en redes sociales, se presenten resultados de estudios estadísticos de los temas más diversos. Las conclusiones suelen presentarse con frases como la siguiente: "El estudio muestra que en el 75 % de los casos se experimenta una mejoría (de cierta enfermedad), siendo el margen de error del 6 % y el nivel de confianza del 95 %". El cálculo de intervalos de confianza para la estimación de parámetros permite hacer declaraciones sobre qué valores se pueden esperar para una característica que se esté estudiando; aunque, a diferencia de la estimación puntual, se habla de un nivel de confianza que tendrá una influencia en el intervalo calculado: intuitivamente la confianza se refiere a la certeza con la que el método dará una respuesta correcta, y por lo tanto se pedirá que ese nivel de confianza sea alto.

Replanteando el problema de encontrar un rango de valores para θ, se tiene lo siguiente: si $\theta \in \Theta$ (el espacio paramétrico) y se quiere disminuir el grado de desconocimiento de θ en $f(x;\theta)$, se debe seleccionar un subconjunto Θ_1 de Θ en el cual pueda afirmarse, con un margen de error pequeño, que se encuentra el valor de θ que caracteriza la distribución de la población. Por ejemplo, suponga que se tiene una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocida y μ desconocida y se desea estimar el parámetro μ. La estadística $T(\underline{X}) = \bar{X}$ tiene distribución $N(\mu, \sigma^2/n)$, entonces,

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[-1.96 &< Z < 1.96] = \phi(1.96) - \phi(-1.96) = \phi(1.96) - (1 - \phi(1.96)) \\ &= 2\phi(1.96) - 1 = 2(0.9725) - 1 = 0.95. \end{aligned}$$

A partir de que se sabe que $\mathbb{P}[-1.96 < Z < 1.96] = 0.95$, se obtiene lo siguiente:

$$-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96,$$

si y sólo si

$$-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

si y sólo si

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

de donde

$$\mathbb{P}\left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0.95.$$

Lo que indica la expresión

$$\mathbb{P}\left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0.95,$$

es que hay una probabilidad de 0.95 de obtener una muestra tal que el intervalo

$$\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

incluya al valor de μ. Esto motiva la definición 1.1 de intervalo aleatorio, aunque en este momento, y haciendo referencia al ejemplo anterior, se puede adelantar que *un intervalo en el que al menos uno de los extremos es una variable aleatoria se llama **intervalo aleatorio**.*

Una vez usada la distribución de $\bar{X}$ para establecer la conclusión anterior, se obtiene un valor particular de $\bar{x}$, con base en una muestra, y se determina el intervalo numérico

$$\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{1.1}$$

En este caso no tiene sentido hablar de la probabilidad de que el intervalo aleatorio contenga al parámetro, ya que no hay ninguna variable aleatoria. Ahora, el 0.95 expresa el *margen de confianza* con el que se puede afirmar que el valor desconocido de μ está entre los extremos del intervalo, en el sentido de que repitiendo el muestreo un gran número de veces, se obtendrían intervalos distintos, entre los cuales aproximadamente el 95 % de estos intervalos contienen el valor correcto de μ.

Por lo tanto, el intervalo numérico $\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ se llama **intervalo de confianza** para μ con un nivel del 95 %.

Observación 1.1 *Un ejercicio para analizar el concepto de intervalo de confianza consiste en simular algunas muestras de una determinada población normal, calcular los intervalos correspondientes a un cierto nivel de confianza y observar la proporción de estos intervalos que contienen al verdadero valor de la media.*

- *El resultado de un ejercicio de simulación se muestra resumido en las gráficas de la figura 1.1, en donde se ha utilizado la expresión (1.1) para el cálculo de los intervalos.*

- Cada una de las gráficas representa intervalos correspondientes a 100 *muestras para diferentes tamaños de muestra, todas con* $\mu = 100$ *y diferentes valores de* σ.
- El ejercicio se hizo utilizando el software estadístico R.
- Las líneas en negro representan los intervalos que no contienen al verdadero valor de la media μ *en cada uno de los casos considerados.*
- Se usó un nivel de confianza del 95 %.
Así, la primera gráfica representa los intervalos correspondientes a 100 *muestras de tamaño* 10 *de una distribución normal con media igual a* 100 *y* $\sigma = 10$.

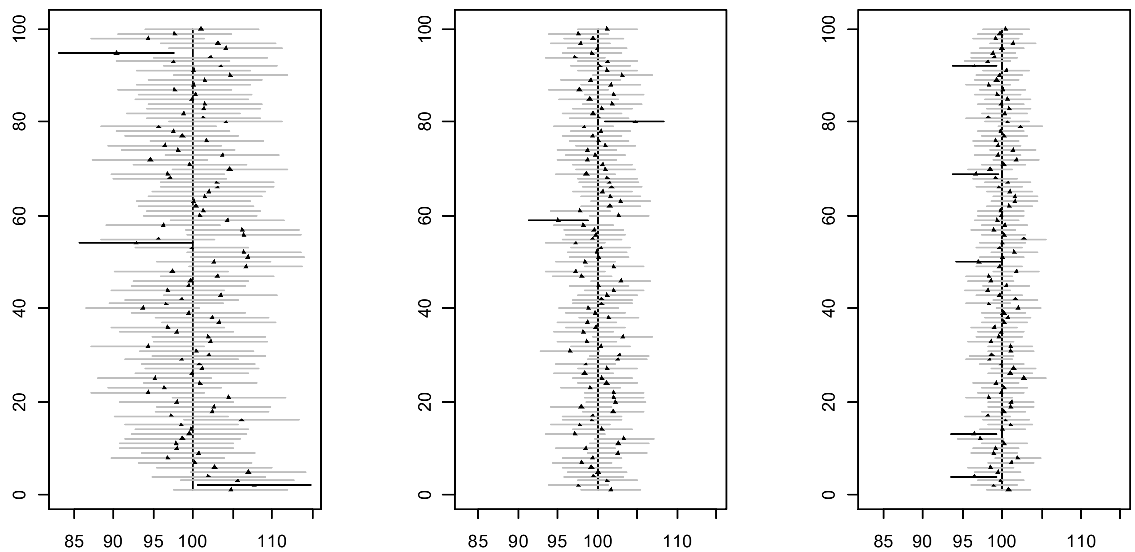

Figura 1.1: Intervalos correspondientes a 100 muestras para diferentes tamaños de muestra, todas con $\mu = 100$ y diferentes valores de σ.

Si se desea un intervalo del 99 % de confianza en este caso de la distribución normal, primero se debe observar que:

$$\mathbb{P}[-2.576 < Z < 2.576] = 0.99.$$

Entonces, a partir de la expresión anterior, se obtiene que

$$\left(\bar{x} - 2.576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

es un intervalo del 99 % de confianza para μ. Note que a mayor nivel de confianza, mayor es la longitud del intervalo. Usualmente se fija un nivel de confianza y entonces se genera el intervalo.

Observe también que en el primer ejemplo $\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ no es el único intervalo del 95 % de confianza para μ, pues $\mathbb{P}[-1.74 < Z < 2.37)] = \phi(2.37) - \phi(-1.74) = \phi(2.37) - 1 + \phi(1.74) = 0.95$. Sin embargo, el de longitud mínima es el originado por $\mathbb{P}[-1.96 < Z < 1.96] = 0.95$.

En general, si para este caso de la distribución $N(\mu, \sigma^2)$, se tiene que:

$$\mathbb{P}\left[a < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b\right] = \gamma,$$

entonces,

$$a < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b \Leftrightarrow a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \bar{X}-b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Suponga que se desea minimizar la longitud del intervalo dada por $(b-a)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con la restricción de que $\mathbb{P}[a < Z < b] = 0.95$, es decir, $F_Z(b) - F_Z(a) = 0.95$, donde $F_Z(z)$ es la función de distribución de una población $N(0,1)$. Para este problema de optimización, se define la función

$$\mathcal{L} = b - a - \lambda(F_Z(b) - F_Z(a) - 0.95).$$

Entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow -1 + \lambda f_Z(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda f_Z(a) = 1 \quad \text{y también}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda f_Z(b) = 0 \Leftrightarrow \lambda f_Z(b) = 1.$$

De donde, $f_Z(a) = f_Z(b)$; por lo tanto, $a = -b$ debido a la simetría de f_Z. Es decir, la distancia $b-a$ será minimizada (para un área fija) cuando $f_Z(a) = f_Z(b)$.

Definición 1.1 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la densidad $f(x;\theta)$ y $\tau(\theta)$ una función de θ. Sean $T_1(\underline{X})$ y $T_2(\underline{X})$ de forma que $T_1 \leq T_2$ y $\mathbb{P}(T_1 < \tau(\theta) < T_2) = \gamma$ (γ no depende de θ). Entonces a (T_1, T_2) se le llama un intervalo aleatorio y a un valor del intervalo aleatorio (t_1, t_2), se le llama intervalo de confianza o un intervalo del $\gamma(100\,\%)$ de confianza para $\tau(\theta)$.*

Como ilustración, considere a $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con distribución $N(\theta, 9)$. Suponga que $T_1(\underline{X}) = \bar{X} - \frac{6}{\sqrt{n}}$ y $T_2(\underline{X}) = \bar{X} + \frac{6}{\sqrt{n}}$ y que (T_1, T_2) forma un intervalo para $\tau(\theta) = \theta$. En este caso,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\bar{X} - \frac{6}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + \frac{6}{\sqrt{n}}\right] &= \mathbb{P}\left[-2 < \frac{\bar{X}-\theta}{3/\sqrt{n}} < 2\right] = \phi(2) - \phi(-2) \\ &= 2\phi(2) - 1 = 2(0.9972) - 1 = 0.9544, \end{aligned}$$

siendo 0.9544 el nivel de confianza. Por ejemplo, si se tiene una muestra aleatoria de 25 observaciones, con una media muestral de 17.5, entonces se dice que $\left(17.5 - \frac{6}{\sqrt{25}}, 17.5 + \frac{6}{\sqrt{25}}\right)$ es un intervalo del 95.44 % de confianza para θ.

Note que alguna de las dos estadísticas (pero no ambas) $T_1(\underline{X})$ ó $T_2(\underline{X})$ puede ser constante; es decir, alguno de los dos extremos del intervalo aleatorio (T_1, T_2) puede ser constante.

Definición 1.2 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la densidad $f(x;\theta)$. Sean $T_1(\underline{X})$ una estadística para la cual $\mathbb{P}(T_1 < \tau(\theta)) = \gamma$; entonces T_1 induce el intervalo de confianza unilateral inferior $(t_1(\underline{x}), \infty)$ con un nivel de confianza γ. De manera análoga, si $T_2(\underline{X})$ es una estadística para la cual $\mathbb{P}(\tau(\theta) < T_2) = \gamma$; entonces T_2 induce el intervalo de confianza unilateral superior $(-\infty, t_2(\underline{x}))$ con un nivel de confianza γ (γ no depende de θ).*

Observación 1.2 *Si ya se ha determinado un intervalo de confianza para θ, entonces, se puede determinar una familia de intervalos de confianza. De manera más específica, para un nivel de confianza del $\gamma(100\,\%)$ dado; si se tiene un intervalo de confianza para θ al $\gamma(100\,\%)$ de confianza, entonces se puede obtener un intervalo con el mismo nivel de confianza para $\tau(\theta)$ donde τ es una función creciente (estricta). Por ejemplo, si τ es una función creciente y (T_1, T_2) es un intervalo de confianza para θ, entonces $(\tau(T_1), \tau(T_2))$ es un intervalo de confianza para $\tau(\theta)$ pues*

$$\gamma = \mathbb{P}[T_1(\underline{X}) < \theta < T_2(\underline{X})] = \mathbb{P}[\tau(T_1(\underline{X})) < \tau(\theta) < \tau(T_2(\underline{X}))].$$

A continuación se describirá un método para encontrar intervalos de confianza, el cual se conoce como el *método de la cantidad pivotal o simplemente método pivotal.*

1.1.1. Método pivotal para encontrar intervalos de confianza

Definición 1.3 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la densidad $f(x;\theta)$. Sea $Q = q(X_1, X_2, ..., X_n; \theta)$, es decir Q es una función de la muestra aleatoria y de θ. Si la distribución de Q no depende de θ, entonces a Q se le llama **cantidad pivotal**.*

Ejemplo 1.1 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con distribución $N(\theta, 1)$ y sea $\tau(\theta) = \theta$. En este caso, $\bar{X} \sim N(\theta, \frac{1}{n})$, entonces $Q_1 := \frac{(\bar{X}-\theta)}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ por lo que Q_1 es una cantidad pivotal. También $Q_2 := \bar{X} - \theta$ es una cantidad pivotal pues $Q_2 \sim N(0, \frac{1}{n})$ (su distribución no depende de θ). Pero $Q_3 := \frac{\bar{X}}{\theta}$ no es una cantidad pivotal, pues $Q_3 \sim N(1, \frac{1}{\theta^2 n})$.*

Definición 1.4 ***Método pivotal para intervalos de confianza**. Sea $Q = q(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ una cantidad pivotal. Entonces, para cualquier $\gamma \in (0,1)$, existirán q_1 y q_2 que dependen de γ tal que*

$$\mathbb{P}\left[q_1 < Q < q_2\right] = \gamma.$$

Si para cada posible muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ se cumple que

$$q_1 < q(x_1, \ldots, x_n; \theta) < q_2,$$

si y sólo si

$$t_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) < \tau(\theta) < t_2\left(x_1, \ldots, x_n\right),$$

para funciones t_1 y t_2 que no dependen de θ, entonces (t_1, t_2) es un intervalo del $\gamma(100)\,\%$ de confianza para $\tau(\theta)$.

En este método, la desigualdad $q_1 < Q < q_2$ se reescribe, invierte o pivotea como $t_1(x) < \tau(\theta) < t_2(x)$.

Como se vió antes en el ejemplo de la distribución normal, puede haber distintos intervalos que proporcionen el mismo nivel de confianza, por lo que se busca el que tenga longitud mínima. Desde una perspectiva más general, el siguiente resultado será de utilidad para encontrar el intervalo de confianza más corto cuando la cantidad pivotal tenga una distribución con una *densidad unimodal.*

Proposición 1.1 *Sea* $f(x)$ *una densidad unimodal y* $F(x)$ *su función de distribución asociada. Sea* $[a, b]$ *un intervalo que satisface que*

$$F(b) - F(a) = 1 - \alpha, \tag{1.2}$$

para α *tal que* $0 < \alpha < 1$. *Entonces de entre todos los intervalos que cumplen (1.2),* $[a_0, b_0]$ *tiene la longitud mínima si* $f(a_0) = f(b_0) > 0$ *y* $a_0 \leq x^* \leq b_0$, *donde* x^* *es la moda de* $f(x)$. *Si además* $f(x)$ *es simétrica, entonces* $a_0 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *y* $b_0 = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Demostración:

Se trata de minimizar la longitud $b - a$ sujeta a $F(b) - F(a) = 1 - \alpha$. Usando multiplicadores de Lagrange, se define:

$$\mathcal{L}(a, b, \lambda) = b - a + \lambda(1 - \alpha - F(b) + F(a)),$$

de donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 1 - \lambda f(a) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 1 - \lambda f(b) = 0$$

y

$$1 - \alpha - F(b) + F(a) = 0.$$

De las primeras dos ecuaciones se obtiene que $f(a) = f(b) > 0$. Si $x^* \notin [a, b]$ y $f(a) = f(b)$, entonces $b - a > b_0 - a_0$, pues $f(x)$ es unimodal y $F(b) - F(a) = F(b_0) - F(a_0)$.

■

Así por ejemplo, si la cantidad pivotal tiene una distribución Ji cuadrada, los cuantiles de orden $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$ de esta distribución contendrán a la moda de la distribución para α pequeño y, de acuerdo a la proposición anterior, proporcionarán el intervalo más corto de tamaño $1 - \alpha$.

Algunos ejemplos

Ejemplo 1.2 *Suponga que se tiene una variable aleatoria con una distribución exponencial con parámetro* $\lambda = \frac{1}{\theta}$*. Obtenga un intervalo del* $90\,\%$ *de confianza para* θ*.*

Como $X \sim$*exponencial, sus funciones de densidad y de distribución son, respectivamente,*

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, \\ F_X(x) &= 1 - e^{-x/\theta}, \end{aligned}$$

con $x > 0$ *y* $\theta > 0$*. Sea* $Y = \frac{X}{\theta}$*, entonces*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\left[Y \leq y\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{X}{\theta} \leq y\right] \\ &= \mathbb{P}\left[X \leq \theta y\right] \\ &= F_X(\theta y), \end{aligned}$$

que implica que $Y \sim$*exponencial*(1)*. Por lo tanto* $Y = \frac{X}{\theta}$ *puede ser una cantidad pivotal ya que es una función de la muestra* X *y del parámetro* θ*, y su distribución no depende de* θ*.*

Así que el intervalo del $90\,\%$ *de confianza para* θ *puede determinarse a partir de*

$$\mathbb{P}\left[a < \frac{X}{\theta} < b\right] = 0.90,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\frac{X}{\theta} < a\right] &= \mathbb{P}\left[X < a\theta\right] \\ &= 1 - e^{-a} = 0.05 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} e^{-a} &= 0.95 \\ a &= -\log(0.95) = 0.051, \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\frac{X}{\theta} > b\right] &= \mathbb{P}\left[X > b\theta\right] \\ &= e^{-b} = 0.05 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$b = -\log(0.05) = 2.996,$$

entonces

$$\left(0.051 < \frac{X}{\theta} < 2.996\right),$$
$$\left(\frac{X}{2.996} < \theta < \frac{X}{0.051}\right).$$

Por lo tanto, $\left(\frac{X}{2.996}, \frac{X}{0.051}\right)$ *es el intervalo del* $90\,\%$ *de confianza para* θ*.*

Ejemplo 1.3 *Sea* X *una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo* $(0, \theta)$*. Obtener un intervalo del* $95\,\%$ *de confianza para* θ*.*

Se sabe que

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\theta}\mathbb{I}_{(0,\theta)}^{(x)}, \\ F_X(x) &= \int_0^x \frac{1}{\theta}dt = \frac{x}{\theta}. \end{aligned}$$

Sea Y *una variable aleatoria definida como* $Y = \frac{X}{\theta}$*, entonces*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X}{\theta} \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \theta y) \\ &= F_X(\theta y) \\ &= \frac{\theta y}{\theta} \\ &= y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la variable aleatoria $Y = \frac{X}{\theta}$ *tiene una distribución uniforme en el intervalo* $(0, 1)$*. Así,* $Q = \frac{X}{\theta}$ *es una cantidad pivotal ya que* Q *es una función de la muestra* X *y del parámetro* θ *y la distribución de* Q *no depende de* θ *porque* $Q \sim Uniforme(0, 1)$*.*

Para obtener un intervalo del $95\,\%$ *de confianza para* θ *puede usarse la cantidad pivotal de la siguiente manera:*

$$\mathbb{P}[a < Q < b] = 0.95.$$

Como $Q \sim Uniforme(0, 1)$*, se pueden tomar cualesquiera cantidades* a *y* b *pertenecientes al intervalo* $(0, 1)$ *tal que* $b - a = 0.95$*. Esto implica que se podría tomar* $a \in (0, 0.05)$ *y* $b = 0.95 + a$*. Entonces, el intervalo del* $95\,\%$ *confianza para* θ *estaría determinado por lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[a < \frac{X}{\theta} < b\right] &= 0.95 \\ \mathbb{P}\left[\frac{X}{b} < \theta < \frac{X}{a}\right] &= 0.95. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\left(\frac{X}{b}, \frac{X}{a}\right)$ *es un intervalo del* $95\,\%$ *de confianza para* θ*. O de manera equivalente,* $\left(\frac{X}{0.95+a}, \frac{X}{a}\right)$ *es un intervalo del* $95\,\%$ *de confianza para* θ*.*

La longitud del intervalo es

$$L = \frac{X}{a} - \frac{X}{0.95 + a},$$

y la longitud esperada del intervalo es

$$\mathbb{E}\,[L] = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{0.95 + a}\right) \mathbb{E}\,[X]\,.$$

Si se buscara un intervalo de confianza con menor longitud esperada, se buscaría minimizar $\mathbb{E}\,[L]$*, lo que equivale a encontrar el valor de* a *tal que* $\mathbb{E}\,[L]$ *alcance su mínimo, y este valor es cuando* $a = 0.05$*, lo que implica que* $b = 1$*. Por lo tanto, el intervalo del* $95\,\%$ *para* θ *con longitud esperada mínima es* $\left(X, \frac{1}{0.05}X\right)$*.*

Ejemplo 1.4 *Suponga que* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *es una muestra aleatoria de una población con distribución exponencial(*θ*).* $\sum_{i=1}^n X_i$ *es una estadística suficiente y tiene distribución Gama(*n, θ*), además* $\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\theta} \sim \chi^2_{(2n)}$*. Entonces la variable* $Q = \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\theta}$ *puede ser la cantidad pivotal para obtener un intervalo del* $100(1-\alpha)\,\%$ *de confianza para* θ*. Así que*

$$\mathbb{P}\left[q_{\alpha/2} < \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\theta} < q_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha,$$

donde $q_{\alpha/2}$ *y* $q_{1-\alpha/2}$ *son los cuantiles* $\alpha/2$ *y* $1-\alpha/2$ *de una distribución* $\chi^2_{(2n)}$*. El intervalo para* θ *que se deduce de esta última expresión es*

$$\left(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{q_{1-\alpha/2}}, \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{q_{\alpha/2}}\right).$$

La distribución χ^2 *es unimodal y como* $(q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2})$ *contiene a la moda de la distribución para* α *razonablemente pequeño, la proposición 1.1 establece que* $(q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2})$ *tiene un intervalo de menor longitud que contiene a* $\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\theta}$ *con probabilidad* $1-\alpha$*. Por lo tanto, el intervalo* $\left(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{q_{1-\alpha/2}}, \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{q_{\alpha/2}}\right)$ *es el de menor longitud.*

1.1.2. El método de la cantidad pivotal para funciones de distribución continuas

Cuando se tiene una muestra aleatoria de una población cuya función de distribución es continua en x, es posible construir una cantidad pivotal como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.2 *Sea* $X_1, ..., X_n$ *una muestra aleatoria de la población con función de densidad* $f(x;\theta)$, *tal que la función de distribución correspondiente* $F(x;\theta)$ *es continua en* x. *Entonces* $-\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i;\theta)$ *o alternativamente* $\prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta)$, *es una cantidad pivotal para estimar* θ.

Demostración:

$F(X_i;\theta)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, pues si $U = F(X;\theta)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U \leq u) &= \mathbb{P}[F(X;\theta) \leq u] \\ &= \mathbb{P}\left[X \leq F^{-1}(u)\right] \\ &= F\left(F^{-1}(u)\right) \\ &= u, \end{aligned}$$

para $0 < u < 1$. Por lo tanto, $-\ln F(X_i;\theta)$ tiene distribución exponencial con parámetro 1, debido a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[-\ln F(X_i;\theta) \geq u] &= \mathbb{P}[\ln F(X_i;\theta) \leq -u] \\ &= \mathbb{P}\left[F(X_i;\theta) \leq e^{-u}\right] \\ &= e^{-u}, \end{aligned}$$

para $u > 0$, es decir,

$$\mathbb{P}[-\ln F(X_i;\theta) \leq u] = 1 - e^{-u},$$

expresión que corresponde a la función de distribución de una variable aleatoria *exponencial* (1).

Así que puede concluirse que

$$-\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i;\theta) \tag{1.3}$$

tiene distribución Gama con parámetros n y 1, al ser la suma de variables aleatorias independientes con distribución *exponencial* (1).

Ahora (1.3) puede usarse como una cantidad pivotal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[q_1 < -\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i;\theta) < q_2\right] &= \mathbb{P}\left[-q_2 < \sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i;\theta) < -q_1\right] \\
&= \mathbb{P}\left[-q_2 < \ln \prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta) < -q_1\right] \\
&= \mathbb{P}\left[e^{-q_2} < \prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta) < e^{-q_1}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[a < \prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta) < b\right],
\end{aligned}$$

donde q_1 y q_2 son los cuantiles de la distribución $Gama\,(n,1)$ que corresponderán al nivel de confianza deseado y con $0 < a < b < 1$. La expresión anterior es equivalente a

$$\mathbb{P}\left[-\ln b < -\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i;\theta) < -\ln a\right].$$

■

Por ejemplo, si se tiene una muestra aleatoria de tamaño n de la población con densidad

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1},\ 0 < x < 1,$$

cuya función de distribución está dada por

$$\begin{aligned}
F(x;\theta) &= \int_0^x \theta u^{\theta-1} du \\
&= \theta \frac{u^\theta}{\theta}\bigg|_{u=0}^{x} = x^\theta,
\end{aligned}$$

para $0 < x < 1$. Si se seleccionan a y b tales que:

$$\mathbb{P}\left[a < \prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta) < b\right] = 1-\alpha$$

o

$$\mathbb{P}\left[q_1 < -\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i;\theta) < q_2\right] = 1-\alpha,$$

donde $q_1 = -\ln b$ y $q_2 = -\ln a$ son los cuantiles de una distribución Gama $(n, 1)$ seleccionados de tal manera que la probabilidad sea de $1-\alpha$. Para este caso particular, $\prod_{i=1}^{n} F(X_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta}$, por lo que

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}\left[a < \prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta) < b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[a < \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta} < b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\ln a < \ln \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta} < \ln b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\ln a < \sum_{i=1}^{n} \ln X_i^{\theta} < \ln b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\ln a < \theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i < \ln b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\ln a < \theta \ln \prod_{i=1}^{n} X_i < \ln b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\frac{\ln b}{\ln \prod_{i=1}^{n} X_i} < \theta < \frac{\ln a}{\ln \prod_{i=1}^{n} X_i}\right],
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho de que $\ln \prod_{i=1}^{n} X_i$ es negativo. Entonces puede concluirse que

$$\left(\frac{\ln b}{\ln \prod_{i=1}^{n} x_i}, \frac{\ln a}{\ln \prod_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

es un intervalo del $100(1-\alpha)$ % de confianza para θ.

1.2. Intervalos de confianza para los parámetros de poblaciones normales

Primero se recordarán algunos resultados técnicos para facilitar la construcción de dichos intervalos. La demostración de dichos resultados se omitirá en virtud de que ya se han estudiado.

(a) Si $X \sim N(0,1)$, entonces $X^2 \sim \chi^2_{(1)}$.

(b) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes tales que para cualquier $j \in \{1, \ldots, n\}$ $X_j \sim \chi^2_{(m_j)}$, entonces $X_1 + X_2, \cdots + X_n \sim \chi^2_{(m_1+\cdots+m_n)}$.

(c) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes tales que para cualquier $j \in \{1, \ldots, n\}$, $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$; entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}.$$

(d) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes tales que para cualquier $j \in \{1, \ldots, n\}$, $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$; entonces

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

(e) Si X y Y son variables aleatorias independientes tales que $X \sim N(0,1)$ y $Y \sim \chi^2_{(k)}$, entonces

$$\frac{X}{\sqrt{Y/k}} \sim t_{(k)}.$$

(f) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}.$$

(g) Si U y V son variables aleatorias independientes tales que $U \sim \chi^2_{(n)}$ y $V \sim \chi^2_{(m)}$, entonces

$$\frac{U/n}{V/m} \sim F_{(n,m)}.$$

Ahora, se encontrarán intervalos de confianza para algunas cantidades relacionadas con poblaciones Gaussianas.

1.2.1. Intervalos para la media

Caso 1: σ^2 conocida.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocida.

Se sabe que $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, entonces $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

La cantidad pivotal es $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. De aquí que $Q \sim N(0,1)$.

Sean $z_{\alpha/2}$, $z_{1-\alpha/2} \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{P}(Q \leq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ y $\mathbb{P}(Q \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

Note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(z_{\alpha/2} &< Q < z_{1-\alpha/2}) = \mathbb{P}(Q \leq z_{1-\alpha/2}) - \mathbb{P}(Q \leq z_{\alpha/2}) \\ &= (1-\alpha/2) - \alpha/2 = 1-\alpha. \end{aligned}$$

También observe que por simetría de la densidad normal estándar $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$.

Por ejemplo, si $1-\alpha = 0.95$, entonces $\alpha = 0.05$, $1-\alpha/2 = 0.975$ y $z_{0.975} = 1.96$.

Así,

$$\mathbb{P}(-z_{1-\alpha/2} < Q < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} < -\mu < z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Por lo tanto, un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para μ cuando σ^2 es conocida está dado por

$$\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Caso 2: σ^2 desconocida.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ donde μ y σ^2 son desconocidos.

Se sabe que $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ y $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$. Entonces,

$$\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \sim t_{(n-1)}.$$

Pero,

$$\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}},$$

donde $S := \sqrt{S^2}$.

$$\therefore \ \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}.$$

Es decir, la cantidad pivotal es $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$.
Sea $t_{n-1}^{1-\alpha/2} \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{P}\left(Y \leq t_{n-1}^{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha/2$, donde $Y \sim t_{(n-1)}$. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(-t_{n-1}^{1-\alpha/2} < Q < t_{n-1}^{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-t_{n-1}^{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1}^{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-\bar{X}-t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X}+t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}-t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

$\therefore$ Un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para μ cuando σ^2 es desconocida está dado por

$$\left(\bar{X} - t_{n-1}^{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1}^{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

1.2.2. Intervalo para la varianza

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con μ y σ^2 desconocidos.

Se sabe que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

Por tanto, la cantidad pivotal es $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$.

Se necesitan determinar los cuantiles $\chi_{n-1}^{\alpha/2}, \chi_{n-1}^{1-\alpha/2} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbb{P}(\chi_{n-1}^{\alpha/2} < Q < \chi_{n-1}^{1-\alpha/2}) = 1-\alpha.$$

Es decir, $\mathbb{P}(Q \leq \chi_{n-1}^{1-\alpha/2}) - \mathbb{P}(Q \leq \chi_{n-1}^{\alpha/2}) = (1-\alpha/2) - (\alpha/2) = 1-\alpha$.

Ahora,

$$\mathbb{P}(\chi_{n-1}^{\alpha/2} < Q < \chi_{n-1}^{1-\alpha/2}) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}(\chi_{n-1}^{\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{n-1}^{1-\alpha/2}) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\chi_{n-1}^{\alpha/2}} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\chi_{n-1}^{1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^{1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^{\alpha/2}}\right) = 1-\alpha.$$

$\therefore$ Un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para σ^2 está dado por

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^{\alpha/2}}\right).$$

Por ejemplo, si $n = 12$ y $1-\alpha = 0.99$, entonces $\alpha = 0.01$. Por lo tanto $\alpha/2 = 0.005$ y $1-\alpha/2 = 0.995$. Así, $\chi_{11}^{0.995} = 26.8$ y $\chi_{11}^{0.005} = 2.60$.

1.2.3. Intervalo para la diferencia de medias de poblaciones independientes

Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $Y_1, \ldots, Y_m$ una muestra aleatoria de la distribución $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ donde Y_j y X_i son independientes.

Caso 1: σ_x^2 y σ_y^2 conocidas.

Se sabe que $\bar{X} \sim N(\mu_x, \sigma_x^2/n)$ y $\bar{Y} \sim N(\mu_y, \sigma_y^2/m)$, entonces

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right).$$

Por tanto,

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1).$$

Entonces, la cantidad pivotal está dada por

$$Q = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}.$$

De aquí que

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} < Q < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} < \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y) < z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}\right) = 1 - \alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left[-(\bar{X} - \bar{Y}) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} < -(\mu_x - \mu_y) < \right.$$

$$\left. < -(\bar{X} - \bar{Y}) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}\right] = 1 - \alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left[(\bar{X}-\bar{Y})-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}<\mu_x-\mu_y<(\bar{X}-\bar{Y})+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}\right]=1-\alpha.$$

$\therefore$ Un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para $\mu_x-\mu_y$, cuando σ_x^2 y σ_y^2 son conocidas, está dado por

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}},(\bar{X}-\bar{Y})+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}\right).$$

Caso 2: σ_x^2 y σ_y^2 desconocidas pero $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2$.
Se sabe que $\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$ y $\frac{(m-1)S_y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(m-1)}$, entonces

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2}+\frac{(m-1)S_y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n+m-2)}.$$

$$\therefore\quad\frac{1}{\sigma^2}((n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2)\sim\chi^2_{(n+m-2)}.\tag{1.4}$$

Y también se sabe que

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}\sim N(0,1).\tag{1.5}$$

Como se hace el supuesto de que las muestras son independientes, se tiene que (1.4) y (1.5) son independientes, por lo que

$$\frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{\sigma^2(n+m-2)}}}\sim t_{(m+n-2)}.$$

Pero,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{\sigma^2(n+m-2)}}} &= \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}}}\\ &= \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}},\end{aligned}$$

donde $S_p^2 = \frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}$.

Entonces,

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}} \sim t_{(m+n-2)}.$$

De aquí que $Q = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}}$ sea una cantidad pivotal tal que $Q \sim t_{(m+n-2)}$.

Ahora, si $t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}$ representa el cuantil $1-\alpha/2$ de una distribución t de student con $n+m-2$ grados de libertad,

$$\mathbb{P}\left(-t_{n+m-2}^{1-\alpha/2} < Q < t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(-t_{n+m-2}^{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}} < t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left[-(\bar{X}-\bar{Y}) - t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2} < -(\mu_x-\mu_y) < \right.$$

$$\left. < -(\bar{X}-\bar{Y}) + t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}\right] = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left[(\bar{X}-\bar{Y}) - t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2} < \mu_x-\mu_y < \right.$$

$$\left. < (\bar{X}-\bar{Y}) + t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}\right] = 1-\alpha.$$

$\therefore$ Un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para $\mu_x-\mu_y$, cuando σ_x^2 y σ_y^2 son desconocidas pero $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2$, está dado por

$$\left((\bar{X}-\bar{Y}) - t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}, (\bar{X}-\bar{Y}) + t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}\right).$$

Ejemplo 1.5 *Una operación de ensamble en una planta manufacturadora requiere aproximadamente de un mes de periodo de entrenamiento para que un empleado nuevo alcance su eficiencia máxima. Se sugirió un nuevo método de entrenamiento y se hizo una prueba para comparar el método nuevo con el procedimiento estándar. Se entrenaron a dos grupos de nueve empleados nuevos por un periodo de tres semanas, un grupo usando el nuevo método (Y) y el otro siguiendo el procedimiento de entrenamiento estándar (X). Se registró la duración de tiempo (en minutos) requerido por cada empleado para ensamblar el aparato al final del periodo de tres semanas.*

Suponiendo que los tiempos de ensamblado se distribuyen aproximadamente normal y que las varianzas de los tiempos de ensamblado son aproximadamente iguales para los dos métodos, obtener un intervalo del 95 % *de confianza para* $\mu_x - \mu_y$.

Procedimiento	*Medidas*								
Estándar X	*32*	*37*	*35*	*28*	*41*	*44*	*35*	*31*	*34*
Nuevo Y	*35*	*31*	*29*	*25*	*34*	*40*	*27*	*32*	*31*

A partir de los datos se obtienen los siguientes valores:

$$\overline{x} = 35.22, \qquad \overline{y} = 31.56,$$

$$\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 = 195.56, \qquad \sum_{i=1}^{9}(y_i - \overline{y})^2 = 160.22,$$

$$S_p^2 = \frac{1}{n+m-2}\left[\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{9}(y_i - \overline{y})^2\right] = 22.24.$$

El cuantil 0.975 *de una distribución* t *con* $n+m-2 = 16$ *grados de libertad es* $t_{(16)}^{0.975} = 2.120$. *El intervalo del* $100(1-\alpha)$ % *de confianza para* $\mu_x - \mu_y$ *es*

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) - t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)S_p^2}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{n+m-2}^{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)S_p^2}\right).$$

Por lo tanto, el intervalo del 95 % *de confianza para* $\mu_x - \mu_y$ *es*

$$\left((35.22 - 31.56) - (2.120)\sqrt{\frac{18}{81}(22.24)}, (35.22 - 31.56) + (2.120)\sqrt{\frac{18}{81}(22.24)}\right),$$

que aproximadamente es $(-1.05, 8.37)$.

Observe que el intevalo para $\mu_x - \mu_y$ *contiene al* 0 *con un nivel de confianza del* 95 %.

1.2.4. Intervalo para el cociente de varianzas de poblaciones independientes

Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $Y_1, \ldots, Y_m$ una muestra aleatoria de la distribución $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ donde Y_j y X_i son independientes.

Se sabe que $\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ y $\frac{(m-1)S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2_{(m-1)}$, entonces

$$\frac{\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2(n-1)}}{\frac{(m-1)S_y^2}{\sigma_y^2(m-1)}} \sim F_{(n-1,m-1)}.$$

Pero

$$\frac{\frac{S_x^2}{\sigma_x^2}}{\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}} = \frac{S_x^2}{S_y^2}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}.$$

De aquí que $Q = \frac{S_x^2}{S_y^2}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ sea una cantidad pivotal tal que $Q \sim F_{(n-1,m-1)}$.

Es necesario determinar los cuantiles $f^{\alpha/2}_{n-1,m-1}$ $f^{1-\alpha/2}_{n-1,m-1}$, tales que:

$$\mathbb{P}\left(f^{\alpha/2}_{n-1,m-1} < Q < f^{1-\alpha/2}_{n-1,m-1}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(f^{\alpha/2}_{n-1,m-1} < \frac{S_x^2}{S_y^2}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} < f^{1-\alpha/2}_{n-1,m-1}\right) = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(f^{\alpha/2}_{n-1,m-1}\frac{S_y^2}{S_x^2} < \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} < f^{1-\alpha/2}_{n-1,m-1}\frac{S_y^2}{S_x^2}\right) = 1-\alpha,$$

o

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{f^{1-\alpha/2}_{n-1,m-1}}\frac{S_x^2}{S_y^2} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{1}{f^{\alpha/2}_{n-1,m-1}}\frac{S_x^2}{S_y^2}\right) = 1-\alpha.$$

$\therefore$ Un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$ está dado por

$$\left(\frac{1}{f^{1-\alpha/2}_{n-1,m-1}}\frac{S_x^2}{S_y^2}, \frac{1}{f^{\alpha/2}_{n-1,m-1}}\frac{S_x^2}{S_y^2}\right). \tag{1.6}$$

Observación 1.3 *Los valores de la distribución $F_{(n,m)}$ están tabulados para valores altos de $1-\alpha$ (o equivalentemente valores bajos de α). Debido a que*

$$P\left[Q < f^{\alpha/2}_{n,m}\right] = \frac{\alpha}{2},$$

con $Q \sim F_{(n,m)}$, *y*

$$\begin{aligned} P\left[Q < \frac{1}{f_{m,n}^{1-\alpha/2}}\right] &= P\left[\frac{1}{Q} > f_{m,n}^{1-\alpha/2}\right] \\ &= 1 - P\left[\frac{1}{Q} < f_{m,n}^{1-\alpha/2}\right] \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

se tiene que

$$f_{n,m}^{\alpha/2} = \frac{1}{f_{m,n}^{1-\alpha/2}}.$$

(Note que en (1.7) se ha utilizado el hecho de que si $Q \sim F_{(n,m)}$, *entonces* $\frac{1}{Q} \sim F_{(m,n)}$*).*

Por lo anterior, el intervalo (1.6) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\left(\frac{1}{f_{n-1,m-1}^{1-\alpha/2}}\frac{S_x^2}{S_y^2}\ ,\ f_{m-1,n-1}^{1-\alpha/2}\frac{S_x^2}{S_y^2}\right).$$

En general, para obtener intervalos para los parámetros de un población Normal, se pueden usar las expresiones que acaban de deducirse, sustituyendo los correspondientes valores de los datos. A manera de ilustración, suponga que el diámetro de una cisterna en la mayoría de los casos es cercano a 3 metros. Se tiene un conjunto de mediciones de 12 cisternas salidas de la fábrica y se desea obtener un intervalo de confianza para la varianza σ^2, suponiendo que el diámetro es una variable aleatoria normalmente distribuida. Los datos correspondientes a los diámetros de las 12 cisternas a las que se hace referencia son:

$$3.01, 3.05, 2.99, 2.99, 3.0, 3.02, 2.98, 2.99, 2.97, 2.97, 2.02, 3.01.$$

Se dedujo que:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^{\alpha/2}}\right)$$

es un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para σ^2. En este caso $n = 12$, $1-\alpha = 0.99$, $\alpha = 0.01$ y

$$S^2 = \frac{\sum_{n=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = 0.0005455.$$

Además:

$$\chi_{11}^{0.995} = 26.8,\ \ \chi_{11}^{0.005} = 2.60,$$

de esta manera el intervalo final queda como

$$(0.0002246, 0.00230791)\,.$$

1.3. Intervalos de confianza para muestras grandes

En esta sección se usará la propiedad asintótica de los estimadores máximo verosímiles, la cual establece que si $\widehat{\theta}_{MV}$ es el estimador máximo verosímil de θ, en $f(x;\theta)$ que cumple las condiciones de regularidad, entonces cuando $n \to \infty$,

$$\widehat{\theta}_{MV} \sim N\left(\theta, \frac{1}{I_{\underline{X}}(\theta)}\right)$$

y, de manera más general,

$$\widehat{\tau(\theta)}_{MV} = \tau\left(\widehat{\theta}_{MV}\right) \sim N\left(\tau(\theta), CICR\right),$$

donde $CICR$ representa la Cota Inferior de Cramer y Rao para estimadores insesgados de $\tau(\theta)$. A partir de estos resultados, puede construirse una cantidad pivotal para el parámetro de interés.

Ejemplo 1.6 *Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de la distribución exponencial (θ). Encontrar un intervalo del 100$(1-\alpha)$ % de confianza para θ.*

El estimador máximo verosímil de θ está dado por $\widehat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\overline{X}}$, mientras que la información esperada de Fisher es $I_{\underline{X}}(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$. Entonces por la propiedad asintótica de los estimadores máximo verosímiles, se tiene que

$$\frac{1}{\overline{X}} \sim N\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$$

por lo que

$$\frac{\frac{1}{\overline{X}} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}} \sim N(0,1),$$

que puede reescribirse como

$$Q = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}} - \theta\right)}{\theta} \sim N(0,1).$$

Así,

$$\mathbb{P}\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}} - \theta\right)}{\theta} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left[\frac{-z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\frac{1}{\overline{X}} - \theta}{\theta} \leq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha,$$

si y sólo si

$$\mathbb{P}\left(\frac{-z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}+1\leq\frac{1}{\theta\overline{X}}\leq\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}+1\right)=1-\alpha,$$

o

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{-z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}+1\right]\overline{X}\leq\frac{1}{\theta}\leq\left[\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}+1\right]\overline{X}\right)=1-\alpha,$$

de donde:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\overline{x}\left(\sqrt{n}+z_{1-\alpha/2}\right)},\frac{\sqrt{n}}{\overline{x}\left(\sqrt{n}-z_{1-\alpha/2}\right)}\right),$$

es un intervalo del $(1-\alpha)\,\%$ *de confianza para* θ.

Ejemplo 1.7 *Sea* $\overline{X}$ *la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño* $n=25$ *de una distribución Gama*(α,λ) *con* $\alpha=4$ *y* $\lambda=\frac{1}{\beta}>0$. *Use el teorema del límite central para obtener un intervalo de confianza para la media de la distribución Gama con un coeficiente de confianza de* 0.954.

Por el teorema del límite central se sabe que

$$\frac{\overline{X}-\mathbb{E}\left[\overline{X}\right]}{\sqrt{Var\left(\overline{X}\right)}}\sim Normal(0,1),$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] &= \frac{1}{n}n\mathbb{E}\left[X\right]=\alpha\beta=4\beta,\\ Var\left(\overline{X}\right) &= \frac{1}{n^2}nVar\left(X\right)=\frac{1}{n}\alpha\beta^2=\frac{1}{n}4\beta^2,\end{aligned}$$

entonces se desea encontrar un intervalo del $95.4\,\%$ *de confianza para* 4β.

Por el teorema del límite central se sabe que

$$\frac{\overline{X}-4\beta}{\sqrt{\frac{1}{n}4\beta^2}}\sim Normal(0,1),$$

que implica que

$$\frac{\overline{X}-4\beta}{\sqrt{\frac{1}{n}}2\beta}=\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{2\beta}-2\sqrt{n}\sim Normal(0,1),$$

y además los cuantiles $(1-0.954)/2$ *y* $1-(1-0.954)/2$ *de una distribución Normal*$(0,1)$ *son* -1.995393 *y* 1.995393*, los cuales se aproximarán a* -2 *y* 2*, entonces,*

$$\begin{aligned}
0.954 &= \mathbb{P}\left[-2<\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{2\beta}-2\sqrt{n}<2\right]\\
&= \mathbb{P}\left[-2+2\sqrt{n}<\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{2\beta}<2+2\sqrt{n}\right]\\
&= \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{2+2\sqrt{n}}<2\beta<\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{-2+2\sqrt{n}}\right]\\
&= \mathbb{P}\left[\frac{2\sqrt{n}\overline{X}}{2+2\sqrt{n}}<4\beta<\frac{2\sqrt{n}\overline{X}}{-2+2\sqrt{n}}\right]\\
&= \mathbb{P}\left[\frac{2(5)\overline{X}}{2+2(5)}<4\beta<\frac{2(5)\overline{X}}{-2+2(5)}\right]\\
&= \mathbb{P}\left[\frac{5\overline{X}}{6}<4\beta<\frac{5\overline{X}}{4}\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, un intervalo del $95.4\,\%$ *de confianza para* 4β *es* $\left(\frac{5\overline{X}}{6},\frac{5\overline{X}}{4}\right)$.

1.3.1. Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución Binomial

Sea $X_1,\ldots,X_m$ una muestra aleatoria de la distribución Binomial (n,p), es decir, $X_i\sim Bin(n,p)$, $\forall i=1,\ldots,m$. Se procederá a encontrar el estimador máximo verosímil de p y la expresión para la cota de Crámer y Rao para estimadores insesgados de p, en este caso:

$$f(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x\left(1-p\right)^{n-x},\qquad \text{con } x=0,\ldots,n.$$

La función de verosimilitud para p está dada por:

$$\begin{aligned}
L\left(p\right) &= \prod_{i=1}^{m}f(x_i;n,p)=\prod_{i=1}^{m}\binom{n}{x_i}p^{x_i}\left(1-p\right)^{n-x_i}\\
&= p^{x_1+\cdots+x_m}\left(1-p\right)^{nm-(x_1+\cdots+x_m)}\underbrace{\prod_{i=1}^{m}\binom{n}{x_i}\mathbb{I}_{\{0,\ldots,n\}}^{(x_i)}}_{\alpha},
\end{aligned}$$

por lo que

$$l\left(p\right)=\ln L\left(p\right)=(x_1+\cdots+x_m)ln(p)+(mn-(x_1+\cdots+x_m))ln(1-p)+ln(\alpha)$$

y

$$\left.\frac{\partial l}{\partial p}\right|_{\hat{p}} = \frac{x_1 + \cdots + x_m}{\hat{p}} - \frac{nm - (x_1 + \cdots + x_m)}{1 - \hat{p}} = 0.$$

De donde,

$$\widehat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{nm} = \frac{\overline{X}}{n}.$$

Por otra parte, la información esperada de Fisher está dada por:

$$I_{\overline{X}} = -m\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2}\ln(f(x;n,p))\right],$$

así:

$$\ln(f(x;n,p)) = x\ln(p) + (n-x)\ln(1-p) + \ln(\binom{n}{x}),$$

tomando la derivada con respecto a p:

$$\frac{\partial}{\partial p} ln(f(x;n,p)) = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p},$$

y la segunda derivada es

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} ln(f_X(x)) = \frac{-x}{p^2} - \frac{n-x}{(1-p)^2}.$$

Tomando esperanza:

$$\mathbb{E}\left(\frac{-x}{p^2} - \frac{n-x}{(1-p)^2}\right) = -\frac{np}{p^2} - \left(\frac{n}{(1-p)^2} - \frac{np}{(1-p)^2}\right),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} I_{\overline{X}} &= -m\left(-\frac{np}{p^2} - \left(\frac{n(1-p)}{(1-p)^2}\right)\right) \\ &= \frac{mn}{p} + \frac{mn}{1-p} = \frac{mn}{p(1-p)}. \end{aligned}$$

De esta manera, se obtiene que la Cota Inferior de Crámer y Rao para estimadores insesgados de p está dada por:

$$CICR = \frac{p(1-p)}{mn}.$$

Sea Q una cantidad pivotal definida por

$$Q = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{CICR}} = \frac{\frac{\overline{X}}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{mn}}} = \frac{\sqrt{mn}(\overline{X} - np)}{\sqrt{p(1-p)}n}.$$

A partir de esta expresión se puede proceder como en el caso de la distribución exponencial expuesto antes, es decir, suponiendo que esta cantidad pivotal tiene una distribución Normal estándar y utilizando el método pivotal para despejar p. Si se toma el caso particular en el que $m = 1$, la cantidad pivotal anterior se reduce a:

$$Q = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}, \tag{1.8}$$

donde X tiene distribución Binomial (n, p), lo cual también se puede ver como el resultado de considerar una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución Bernoulli(p), donde X representaría la suma de las variables de dicha muestra. Aún en este caso es complicado obtener el intervalo para p a partir de esta expresión, pues el parámetro aparece tanto en el numerador como en el denominador. Un resultado de la teoría asintótica establece que la cantidad

$$\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}}, \tag{1.9}$$

también tiene distribución $N(0, 1)$. Para revisar la justificación de este tema, ver Casella (2002), sección 10.1. Note que para este caso, $\widehat{p} = \frac{X}{n}$, por lo que usando (1.9) como cantidad pivotal, se obtiene que

$$P\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha,$$

que es equivalente a

$$P\left[\frac{X}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}} < p < \frac{X}{n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}}\right] = 1 - \alpha,$$

por lo que

$$\left(\frac{x}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}, \frac{x}{n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}\right).$$

es un intervalo del $100\,(1-\alpha)\,\%$ de confianza para p.

1.4. Enfoque Bayesiano en la estimación por intervalo

En el enfoque Bayesiano la estimación por intervalo para el (los) parámetro(s) desconocidos, θ, de un modelo se basa en la distribución posterior de los mismos $\pi(\theta|x)$.

Un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de credibilidad es cualquier intervalo (L, U) que satisface que

$$\int_L^U \pi(\theta|x)d\theta = 1-\alpha.$$

Estos intervalos de probabilidad no son únicos. Se puede adoptar por ejemplo un intervalo de colas iguales donde

$$\int_{-\infty}^{L} \pi(\theta|x)d\theta = \int_U^{\infty} \pi(\theta|x)d\theta = \alpha/2,$$

o uno unilateral donde $L=-\infty$ o $U=\infty$. En los casos donde la distribución posterior del parámetro de interés es unimodal, también es posible adoptar un intervalo de *alta densidad posterior*, (HPD) por sus siglas en inglés, donde $\pi(L|x)=\pi(U|x)$. En este caso, este intervalo es el de menor longitud.

Ejemplo 1.8 *Sean* $X \sim Bin(n,\theta)$ *y* $\theta \sim Beta(g,h)$ *, entonces*

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x) &\propto f(x|\theta)\pi(\theta)\\ &\propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}\theta^{1-g}(1-\theta)^{h-1}\\ &= \theta^{g+x}(1-\theta)^{h+n-x}.\end{aligned}$$

De esta expresión se concluye que las constantes de normalización corresponden a aquellas de una distribución $Beta(g+x, h+n-x)$*, que es la distribución posterior para* θ *bajo esta distribución inicial conjugada. Si ahora se considera el escenario con* $n=10$ *y* $x=4$ *éxitos observados en el experimento de interés, para una distribución inicial* $Be(2,2)$*; se tiene que la distribución posterior* $\pi(\theta|x)$ *es una* $Beta(6,8)$*. Los intervalos del* $99\,\%$ *de confiabilidad se muestran en la figura 1.2.*

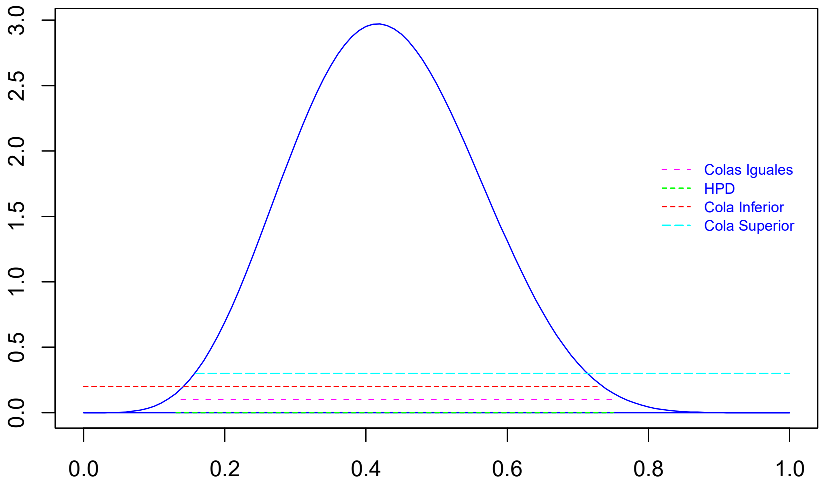

Figura 1.2: Intervalos del 99 % de confiabilidad para el ejemplo 1.8.

1.5. Ejercicios

1. (Construcción del concepto de intervalo de confianza mediante simulación en R). Revise cuidadosamente las siguientes gráficas obtenidas por simulación en R.

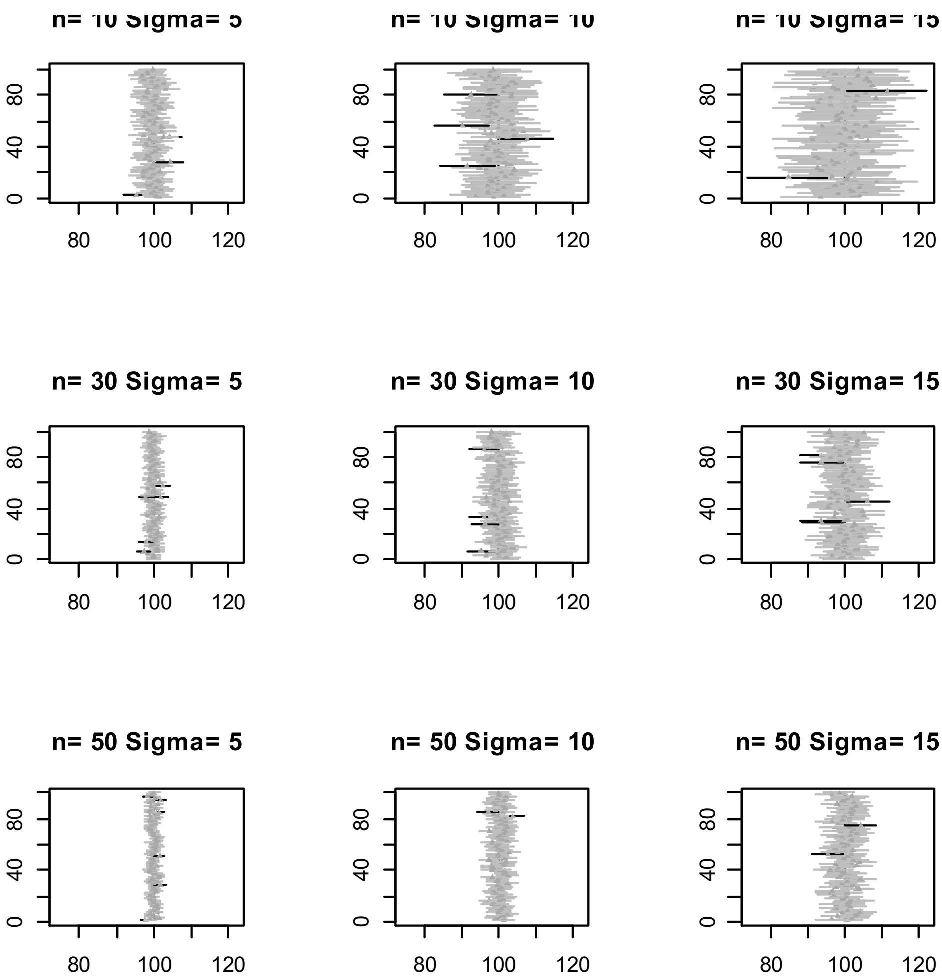

Figura 1.3: Intervalos obtenidos por simulación para diferentes valores de σ y distintos tamaños de muestra.

Ahí se presentan 100 intervalos de confianza variando el tamaño de muestra según tres posibilidades (10, 30 y 50) y la desviación estándar según 3 opciones (5, 10 y 15). Así, finalmente se tienen 9 combinaciones según varía el tamaño de muestra y la desviación estándar, siendo los escenarios posibles: $n = 10$ y $\sigma = 5$ hasta $n = 50$ y $\sigma = 15$. Cuando un intervalo de confianza no contiene el verdadero promedio se ilustra con una línea negra (el punto medio de cada intervalo es de color gris oscuro). Conteste lo siguiente:

(a) Determine mediante observación: ¿cuántos intervalos aproximadamente no contienen el verdadero valor de la media en cada una de las simulaciones?, ¿coincide con lo que se espera si la confianza es del 95 %?.

(b) ¿Se espera que la cantidad de intervalos de confianza que no contiene al verdadero valor poblacional sea el mismo para cada uno de los nueve casos?.

(c) Si observa únicamente la primera fila de las simulaciones, explique: ¿cuál es el impacto de la desviación estándar sobre los intervalos mostrados en la grafica?, ¿se aplica también para la segunda fila y tercera fila de simulaciones?.

(d) Si observa únicamente la primera columna de las simulaciones, explique: ¿cuál es el impacto del tamaño de muestra sobre los intervalos hallados?, ¿se aplica también para la segunda y tercera columnas de simulaciones?.

2. Genere una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$, de tamaño $n = 30$, de una población con distribución $N(\mu_x, \sigma^2)$ con $\mu_x = 5$ y $\sigma^2 = 4$. Genere otra muestra aleatoria $Y_1, \ldots, Y_m$, de tamaño $m = 50$, de una población con distribución $N(\mu_y, \sigma^2)$ con $\mu_y = 2$ y $\sigma^2 = 4$. Obtenga los intervalos de confianza para $\mu_x - \mu_y$ bajo las condiciones y supuestos de los siguientes incisos, y grafíquelos.

(a) Intervalo del 80 % de confianza para $\mu_x - \mu_y$, suponiendo que σ^2 es conocida.

(b) Intervalo del 80 % de confianza para $\mu_x - \mu_y$, suponiendo que σ^2 es desconocida común.

(c) Intervalo del 95 % de confianza para $\mu_x - \mu_y$, suponiendo que σ^2 es conocida.

(d) Intervalo del 95 % de confianza para $\mu_x - \mu_y$, suponiendo que σ^2 es desconocida común.

Repita el proceso generando cada una de estas muestras 100 veces. ¿Cómo son los intervalos? Identifique los intervalos con mayor longitud y con menor longitud. Compare y explique los resultados.

3. Suponga que X es una variable aleatoria de la población con función de densidad dada por

$$f_X(x;\theta) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(x),$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido. Sea $\alpha \in (0, 1)$. Construya un intervalo del $100(1-\alpha)$ % de confianza para θ, utilizando como cantidad pivotal $Q = \frac{X}{\theta}$.

4. Sea X una variable aleatoria de la población con función de densidad $f_X(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$, donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido.

   (a) Encuentre una cantidad pivotal y utilícela para encontrar un intervalo de confianza para θ.

   (b) Demuestre que $\left(\frac{Y}{2}, Y\right)$ es un intervalo de confianza para θ, donde $Y = -\frac{1}{log(X)}$. Encuentre su nivel de confianza.

5. Sea X una variable aleatoria de una población con función de densidad $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, donde $x > 0$ y $\theta > 0$.

   (a) Sea $(X, 2X)$ un intervalo de confianza para $1/\theta$. ¿Cuál es su nivel de confianza?

   (b) Encuentre otro intervalo de confianza para $1/\theta$ que tenga el mismo nivel de confianza que el intervalo de (a), pero con menor longitud esperada.

6. Considere una sola observación X de las siguientes distribuciones. Dado $\alpha \in (0,1)$, encuentre un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para θ.

   (a) Laplace-localización

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   (b) Cauchy

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   (c) Laplace-escala

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}e^{-|x|/\theta}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x), \quad \theta \in \mathbb{R}^+.$$

7. Sea X_1, X_2, X_3, X_4 una muestra aleatoria de tamaño 4 de una población con distribución $U(0,\theta)$. Sea $Y_{(4)}$ la máxima estadística de orden. Sean $0 < \kappa_1 < \kappa_2 \leq 1$ constantes tales que

$$\mathbb{P}(\kappa_1\theta < Y_{(4)} < \kappa_2\theta) = 0.95.$$

   Verifique que $\kappa_1 = \sqrt[4]{0.05}$ y $\kappa_2 = 1$ satisfacen estas condiciones. ¿Cuál es entonces un intervalo del $95\,\%$ de confianza para θ?

8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con distribución $U(0,\theta)$. Sea $Y = \max_{i=1,\ldots,n}\{X_i\}$. Pruebe que Y/θ es una cantidad pivotal, y muestre que el intervalo $(Y, Y\alpha^{-1/n})$ es el intervalo del $(1-\alpha)100\,\%$ de confianza para θ con menor longitud.

9. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con función de densidad

$$f(x; \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\theta)/\sigma} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x),$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Sea $\alpha \in (0,1)$.

   (a) Si θ es conocido, encuentre un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para σ. [Sugerencia: Quizá le sirva $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)$, o una pequeña modificación del mismo.]

   (b) Si θ es desconocido, encuentre un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para σ. [Sugerencia: Quizá le sirva $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(n)})$, o una pequeña modificación del mismo.]

10. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $Exp(\theta)$, cuya función de densidad es

$$f_{X_i}(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

   (a) Encuentre un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para la media de la población.

   (b) Encuentre un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para la varianza de la población.

   (c) Encuentre una cantidad pivotal basada únicamente en Y_1, donde

$$Y_1 = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\},$$

   y úsela para encontrar un estimador de intervalo para θ.

11. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una población con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1/\theta)$. Encuentre un intervalo del $95\,\%$ de confianza para θ.

12. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con distribución $Gamma(\alpha, \beta)$. Si α es una constante conocida, obtenga un intervalo de confianza para la media $\mu = \alpha\beta$.

13. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$, cuya función de densidad es $f_X(x;\theta) = 1$ para $\theta - \frac{1}{2} < x < \theta + \frac{1}{2}$. Sean $Y_1 \leq \cdots \leq Y_n$ sus correspondientes estadísticas de orden.

   (a) Muestre que $[Y_1, Y_n]$ es un intervalo de confianza para θ.

   (b) Calcule su longitud esperada, es decir, $\mathbb{E}[Y_n - Y_1]$.

   (c) Encuentre su nivel de confianza.

14. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de densidad

$$f_{X_i}(x_i; \theta) = e^{i\theta - x_i},$$

donde $x_i > i\theta$.

(a) Obtenga una estadística T que sea suficiente para θ.

(b) Obtenga una cantidad pivotal Q que sea función de T.

(c) Encuentre un intervalo del $(1-\alpha)100\,\%$ de confianza para θ de la forma $[T+a, T+b]$ tal que tenga menor longitud.

15. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con función de densidad

$$f_X(x; \theta) = \frac{kx^{k-1}}{\theta^k} \mathbb{I}_{(0,\theta)}(x)$$

donde $\theta > 0$ y k es un entero positivo. Encuentre un intervalo del $(1-\alpha)100\,\%$ de confianza para θ.

16. ¿Qué tan grande debe ser una muestra si se desea construir un intervalo de confianza del $99\,\%$ para la desviación estándar de una población normal si se desea que la desviación estándar muestral no difiera en más del $2\,\%$ de la desviación poblacional?

17. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Si σ^2 es conocida. Encuentre el valor mínimo de n que garantice que el intervalo del $95\,\%$ de confianza para μ tendrá longitud no mayor que $\sigma/4$.

(b) Si σ^2 es desconocida. Encuentre el valor mínimo de n que garantice que, con probabilidad 0.90, el intervalo del $95\,\%$ de confianza para μ tendrá longitud no mayor que $\sigma/4$.

18. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Sean $0 < a < b$. Demuestre que la esperanza de la longitud del intervalo

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{b}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{a} \right)$$

es $(b-a)\frac{n\sigma^2}{ab}$.

19. Sean $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ las medias de dos muestras aleatorias independientes entre sí, cada una de tamaño n, de las distribuciones $N(\mu_x, \sigma^2)$ y $N(\mu_y, \sigma^2)$, respectivamente, donde la varianza común es conocida. Encuentre n tal que

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - \bar{Y} - \frac{\sigma}{5} < \mu_x - \mu_y < \bar{X} - \bar{Y} + \frac{\sigma}{5} \right) = 0.9.$$

20. Considere X una variable aleatoria tal que $X \sim N(0, \sigma^2)$, donde $\sigma > 0$ es un parámetro desconocido. Considere el siguiente intervalo de confianza $(|X|, 10|X|)$ para σ.

    (a) Calcule $\mathbb{P}(|X| \leq \sigma \leq 10|X|)$.

    (b) ¿Cuál es la longitud esperada de dicho intervalo?

21. Se desea hacer una comparación entre dos tratamientos para el SIDA. Se mide el tiempo de falla (en años) de cada uno de estos tratamientos en siete pacientes seleccionados aleatoriamente. La información se detalla en la siguiente tabla.

Paciente	1	2	3	4	5	6	7
Tratamiento 1	3.1	3.3	1.7	1.2	0.7	2.3	2.9
Tratamiento 2	1.8	2.3	2.2	3.5	1.7	1.6	1.4

    Construya un intervalo del 80 % de confianza para la diferencia de medias. ¿Se necesita hacer alguna suposición adicional?

22. Sea realizó un estudio para determinar si la variabilidad en la presión arterial de hombres y mujeres es la misma o no. Se seleccionó aleatoriamente a 13 mujeres y a 16 hombres, se les midió la presión arterial (en milímetros de mercurio) y los resultados fueron los siguientes:

Hombres	120	120	118	112	120	114	130	114
	124	125	130	100	120	108	112	122
Mujeres	122	102	118	126	108	130	104	116
	102	122	120	118	130			

    ¿Se puede concluir con un 95 % de confianza que la variabilidad de la presión arterial de hombres y mujeres es la misma? ¿Se necesitan hacer suposiciones adicionales?

23. Sean $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ las medias muestrales, y S_x^2 y S_y^2 los estimadores insesgados de la varianza, obtenidos de dos muestras independientes cada una de tamaño 7 de dos poblaciones normales con varianza común σ^2 y media desconocida. Encuentre $k \in R$, tal que

$$\mathbb{P}\left(\text{máx}\left\{\frac{S_x^2}{S_y^2}, \frac{S_y^2}{S_x^2}\right\} > \kappa\right) = 0.05.$$

24. Se miden los tiempos de compra de 61 compradores seleccionados aleatoriamente. Si estos tiempos tienen una distribución normal, encuentre un intervalo del 95 % de confianza para μ si $\bar{x} = 33$ y $s^2 = 256$.

25. Se cuenta con dos grupos similares de pacientes, A y B, que consisten de 50 y 100 individuos, respectivamente. Al grupo A se le administró una nueva pastilla para dormir y a la segunda una pastilla para dormir ya existente. En el grupo A, el número promedio

de horas de sueño fué de 7.82 con una desviación estándar de 15 minutos. En el grupo B, el número promedio de horas de sueño fué de 6.75 con una desviación estándar de 18 minutos. Construya intervalos del 95 % y 99 % de confianza para la diferencia de las horas promedio dormidas.

26. Los siguientes datos representan el tiempo de vida útil de un artículo, medido en días: 29.1, 207.6, 81.8, 0.8, 76.1, 108.9, 48.4, 108.1, 52.2, 272.8, 150.5, 80.3, 97.4, 11.5, 46.2, 144.1, 62.5, 262.9, 247.6, 4.1. Este tiempo se supone distribuído como una exponencial con media θ, $Exp(1/\theta)$.

    (a) Encuentre un intervalo de confianza exacto al 95 % para la media de esta exponencial.

    (b) Encuentre un intervalo de confianza aproximado al 95 % para esta media utilizando teoría asintótica.

    (c) Encuentre un intervalo de confianza aproximado al 95 % para esta media utilizando los resultados de distribución asintótica del estimador máximo verosímil.

    (d) Comente los resultados obtenidos y las diferencias (si las hubo) entre los tres procedimientos.

27. Se lanza una moneda 500 veces, y se obtienen 275 águilas y 225 soles. Obtenga un intervalo de confianza para la probabilidad de obtener águila. Obtenga también un intervalo del 99 % de confianza. ¿Está bien construida la moneda?

28. Una urna contiene una proporción desconocida de cánicas rojas y blancas. De una muestra aleatoria con reemplazo de 60 cánicas se obtuvo un 70 % de cánicas rojas. Encuentre intervalos del 95 % y 99.73 % de confianza para la proporción de cánicas rojas en la urna.

29. Para estimar la proporción de desempleados en Panamá, un economista selecciona aleatoriamente a 400 individuos de la población (clase trabajadora o económicamente activa en algún momento). De los entrevistados 25 no tienen empleo. Estime un intervalo del 95 % de confianza para la proporción de desempleados.

30. De una lista electoral de opinión pública se invita a 100 personas de entre 10,000 adultos a expresar su preferencia por los candidatos A y B. Treinta personas prefirieron a A. De esto se concluyó que entre 2100 y 3900 de la población prefieren a A. ¿Qué nivel de confianza se usó en este informe?. Nótese que $n = 100$ y $Y = 30$ es el número de éxitos (las personas que prefirieron a A) y que el intervalo está dado para la media np.

31. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $Poisson(\lambda)$. Suponga que el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande y por lo tanto se

cumplen las propiedades del estimador máximo verosímil de λ. Construya un intervalo del $(1-\alpha)100\,\%$ de confianza para λ.

32. Encuentra una cantidad pivotal basada en una muestra aleatoria de una distribución $N(\theta,\theta)$ con $\theta > 0$. Usa la cantidad pivotal para encontrar un intervalo del $(1-\alpha)\,\%$ de confianza para θ.

33. Considere una muestra aleatoria $X_1,\ldots,X_n$ de un modelo $N(\mu,\tau)$ donde $\tau = 1/\sigma^2$. Suponiendo que las distribuciones iniciales corresponden al modelo conjugado, obtenga un intervalo de credibilidad de $95\,\%$, de colas iguales para cada parámetro. Obtenga para μ el intervalo HDP del $90\,\%$.

Bibliografía

[1] Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Duxbury Advanced Series. 2nd. ed.

[2] Canavos, G. C. (2003). *Probabilidad y Estadística, aplicaciones y métodos*. Mc Graw Hill.

[3] Hogg, R.V., McKean, J. W., Craig, A. T. (2014). *Introduction to Mathematical Statistics*. Pearson Education International. 7th. ed.

[4] Kapadia, A.S., Chan, W. y Moyé, L. (2005). *Mathematical Statistics with Applications*. Chapman & Hall, Inc./CRC Press.

[5] Lindgren, B.W. (1993). Statistical Theory. Chapman & Hall, Inc. 4th ed.

[6] Mood, A. M., Graybill, F. A. y Boes, D. C. (1974). *Introduction to the theory of stastistics*. Mc Graw-Hill, Inc. 3rd. ed.

[7] Stuart, A., Ord, J. K. y Arnold, S. (1999). *Advanced Theory of Statistics, 2A: Clasical Inference and the Linear Model*. London: Oxford University Press, 6th ed.